Factoriser à l'aide d'une identité remarquable

Je révise mon brevet pas à pas.

Correction

Prérequis : cours « Factoriser une expression littérale » et « Développer et réduire une expression littérale ».

- Factoriser une expression littérale, c'est transformer une somme (ou différence) en un produit. **C'est le contraire de développer** :

$$\mathbf{k} \times \mathbf{a} + \mathbf{k} \times \mathbf{b} = \mathbf{k} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{a} - \mathbf{k} \times \mathbf{b} = \mathbf{k} \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})$$

→ Il faut repérer le **facteur commun**.
→ On regroupe dans une parenthèse les autres facteurs, en addition ou soustraction.

Exemples :

$$3x + 12 = 3 \times x + 3 \times 4 = 3 \times (x + 4)$$
$$x^2 - 7x = x \times x - 7 \times x = x \times (x - 7)$$
$$4x(x+1) + 3(x+1) = (x+1) \times (4x+3)$$

- Suppression de **parenthèses précédées d'un « - »** : on change les signes à l'intérieur.

Exemples : $5x - (2x - 7) = 5x - 2x + 7 = 3x + 7$

$4x - 7 - (-3x + 5) = 4x - 7 + 3x - 5 = 7x - 12$

Factoriser avec une identité remarquable.

Méthode pour factoriser une identité remarquable

Soient a et b deux nombres quelconques, on a l'identité remarquable :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Forme développée $\xrightarrow{\text{on factorise}}$ Forme factorisée

Pour factoriser à l'aide de cette identité remarquable :

1. on repère l'identité remarquable comme **la différence de deux carrés** ;
2. on identifie ***a*** et ***b*** ;
3. on applique l'identité, sous sa forme factorisée.

Exemples :

$\boldsymbol{A = 9x^2 - 25}$ → on repère la différence de deux carrés

$\boldsymbol{A = (3x)^2 - 5^2}$ → on identifie $a = 3x$ et $b = 5$ dans $a^2 - b^2$

$\boldsymbol{A = (3x - 5)(3x + 5)}$ → on remplace a par $3x$ et b par 5 dans $(a - b)(a + b)$

$\boldsymbol{B = (4x - 7)^2 - 100}$ → on repère la différence de deux carrés

$\boldsymbol{B = (4x - 7)^2 - 10^2}$ → on identifie $a = 4x - 7$ et $b = 10$ dans $a^2 - b^2$

$\boldsymbol{B = (4x - 7 - 10)(4x - 7 + 10)}$ → on remplace a par $4 - 7x$ et b par 5 dans $(a - b)(a + b)$

$\boldsymbol{B = (4x - 17)(4x + 3)}$

Complète :

L'expression…	$\mathbf{9}$	$\boldsymbol{25x^2}$	$\boldsymbol{4x^2}$	$\mathbf{100}$	$\boldsymbol{36x^2}$	$\boldsymbol{16x^2}$
est le carré de …	$\mathbf{3}$	$\boldsymbol{5x}$	$\boldsymbol{2x}$	$\mathbf{10}$	$\boldsymbol{6x}$	$\boldsymbol{4x}$

Complète les factorisations suivantes :

$A = x^2 - 16 = x^2 - 4^2$

Il s'agit de $a^2 - b^2$ avec $a = x$ et $b = 4$,

donc : $A = (x - 4)(x + 4)$

$B = 9x^2 - 25 = (3x)^2 - 5^2$

Il s'agit de $a^2 - b^2$ avec $a = 3x$ et $b = 5$,

donc : $B = (3x - 5)(3x + 5)$

Factorise les expressions suivantes grâce à l'identité remarquable :

$C = x^2 - 64$

$C = x^2 - 8^2$

→ Il s'agit de $a^2 - b^2$

avec $a = x$ et $b = 8$

$C = (x - 8)(x + 8)$

$D = 49x^2 - 1$

$D = (7x)^2 - 1^2$

→ Il s'agit de $a^2 - b^2$

avec $a = 7x$ et $b = 1$

$D = (7x - 1)(7x + 1)$

$E = 81x^2 - 4$

$E = (9x)^2 - 2^2$

→ Il s'agit de $a^2 - b^2$

avec $a = 9x$ et $b = 2$

$E = (9x - 2)(9x + 2)$

Complète les factorisations suivantes :

$F = (2x - 3)^2 - 36$

$F = (2x - 3)^2 - 6^2$

Il s'agit de $a^2 - b^2$ avec $a = 2x - 3$ et $b = 6$.

$F = ((2x - 3) - 6)((2x - 3) + 6)$

Parenthèses « inutiles »

$F = (2x - 9)(2x + 3)$

$G = 100 - (x + 3)^2$

$G = 10^2 - (x + 3)^2$

Il s'agit de $a^2 - b^2$ avec $a = 10$ et $b = x + 3$.

$G = \big(10 - (x + 3)\big)\big(10 + (x + 3)\big)$

Suppression de parenthèses précédées d'un « - »

$G = (10 - x - 3)(10 + x + 3)$

$G = (7 - x)(13 + x)$

Attention aux changements de signes pour les parenthèses précédées d'un « – »

Factorise les expressions suivantes :

$H = (2x+5)^2 - 121$
$H = (2x+5)^2 - 11^2$
→ Il s'agit de $a^2 - b^2$
avec $a = 2x+5$ et $b = 11$
$H = \big((2x+5) - 11\big)\big((2x+5) + 11\big)$
$H = (2x-6)(2x+16)$

$I = (4x+7)^2 - (x-3)^2$
→ Il s'agit de $a^2 - b^2$
avec $a = 4x+7$ et $b = x-3$
$I = \big((4x+7) - (x-3)\big)\big((4x+7) + (x-3)\big)$
$I = (4x+7-x+3)(4x+7+x-3)$
$I = (3x+10)(5x+4)$

Un professeur demande à ses élèves :

Calculer astucieusement $105^2 - 95^2$

Alors que beaucoup soupirent devant l'apparente difficulté de ce calcul, très rapidement Malicia lève la main ! Mais elle est très timide et parle tout bas…

Ses camarades n'entendent pas sa réponse, mais seulement la fin de son explication :

… avec $a = 105$ et $b = 95$

1. Retrouve la démarche de Malicia, détaille son calcul, et donne le résultat.

Elle a reconnu $a^2 - b^2$ avec $= 105$ et $b = 95$.

Elle a ensuite factorisé l'identité remarquable sous la forme $(a-b)(a+b)$:

$105^2 - 95^2 = (105-95)(105+95) = 10 \times 200 = 2000$

2. De même, calcule astucieusement :

$75^2 - 25^2$
$a^2 - b^2$ avec
$a = 75 \; et \; b = 25$
$= (75-25) \times (75+25)$
$= 50 \times 100 = \mathbf{5000}$

$33^2 - 13^2$
$a^2 - b^2$ avec
$a = 33 \; et \; b = 13$
$= (33-13) \times (33+13)$
$= 20 \times 46 = \mathbf{920}$

$55^2 - 53^2$
$a^2 - b^2$ avec
$a = 55 \; et \; b = 53$
$= (55-53)(55+53)$
$= 2 \times 108 = \mathbf{216}$

Factoriser une expression littérale.

Méthode pour factoriser une expression littérale.

Etape ① : j'identifie le cas de factorisation **:**

→ je repère un **facteur commun** :

$\mathbf{k \times a + k \times b}$ ou $\mathbf{k \times a - k \times b}$

ou

→ je repère **la différence de deux carrés** :

$\boldsymbol{a^2 - b^2}$

Etape ② : j'applique la factorisation :

→ avec la **distributivité** :

$$\mathbf{k \times a + k \times b = k \times (a + b)}$$
$$\mathbf{k \times a - k \times b = k \times (a - b)}$$

→ avec **l'identité remarquable** :

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$$

Remarques :

- Une factorisation est terminée quand l'expression est un produit.
- Une factorisation peut s'effectuer en plusieurs étapes.
- Une expression n'est pas toujours « factorisable ».

Exemples :

$\boldsymbol{A = (2x + 7)(x + 5) + x^2 - 25}$ ① j'identifie **la différence de deux carrés.**

$\boldsymbol{A = (2x + 7)(x + 5) + x^2 - 5^2}$ ② j'applique **l'identité remarquable.**

$\boldsymbol{A = (2x + 7)\underline{(x + 5)} + (x - 5)\underline{(x + 5)}}$ ③ je repère **un facteur commun.**

$\boldsymbol{A = (x + 5)\,((2x + 7) + (x - 5))}$ ④ je factorise **avec la distributivité.**

$\boldsymbol{A = (x + 5)(3x + 2)}$ ← Forme factorisée (produit)

Parmi les expressions suivantes, entoure celles qui correspondent à un produit, c'est-à-dire qui sont sous forme factorisée :

$(3x + 2)(4x - 5)$	$(7x - 2) - (3x + 1)$	$2x + (4 \times x - 1)$	$3(4x - 6)$
$x^2 - 5x$	$x^2(3 - x)$	$(x + 1)^2 - 9$	$(x + 4)(2x + 1) + 3$

Parmi les expressions suivantes, entoure :

- **en bleu celles que tu reconnais comme ayant un facteur commun ;**
- **en rouge celles que tu reconnais comme étant la différence de deux carrés.**

$4x^2 - 121$	$2x^2 - 16$	$25x^2 - 1$	$16x^2 - 25x$
$x^2 - 100$	$(2x+3)^2 - 9x^2$	$9x^2 + 49$	$(x-8)^2 - (4x+3)^2$

Factorise si possible les expressions suivantes :

$\boldsymbol{J = x^2 - 7x}$

$\boldsymbol{J = x \times x - 7 \times x}$ **facteur commun**

$\boldsymbol{J = x \times (x - 7)}$

$\boldsymbol{L = 9x^2 + 25}$

Il n'y a pas de facteur commun et il ne s'agit pas d'une différence de carrées : cette expression n'est pas factorisable.

$\boldsymbol{N = 25x^2 - 1 - 3x(5x + 1)}$

$N = (5x)^2 - 1^2 - 3x(5x + 1)$ **différence de carrés**

$N = (5x - 1)(\boldsymbol{5x + 1}) - 3x(\boldsymbol{5x + 1})$ **facteur commun**

$N = (\boldsymbol{5x + 1})(5x - 1 - 3x)$

$\boldsymbol{N = (5x + 1)(2x - 1)}$

$\boldsymbol{K = (x - 8)^2 - 16}$

$\boldsymbol{K = (x - 8)^2 - 4^2}$ différence de carrés

$\boldsymbol{K = (x - 8 - 4)(x - 8 + 4)}$

$\boldsymbol{K = (x - 12)(x - 4)}$

$\boldsymbol{M = (4x - 1)^2 - 6(4x - 1)}$

$\boldsymbol{M = (4x - 1)(4x - 1) - 6(4x - 1)}$ **facteur commun**

$\boldsymbol{M = (4x - 1)(4x - 1 - 6)}$

$\boldsymbol{M = (4x - 1)(4x - 7)}$

1. Factorise $\boldsymbol{P = (x + 5)^2 - 9x^2}$.

$\boldsymbol{P = (x + 5)^2 - (3x)^2}$

$\boldsymbol{P = (x + 5 - 3x)(x + 5 + 3x) = (-2x + 5)(4x + 5)}$

2. En déduire la forme factorisée de l'expression : $\boldsymbol{Q = (x + 5)^2 - 9x^2 - (x - 7)(4x + 5)}$.

$\boldsymbol{Q = (x + 5) - 9x^2 - (x - 7)(4x + 5)}$

On retrouve $\boldsymbol{P}$ dans l'expression $\boldsymbol{Q}$ donc on utilise la forme factorisée de $\boldsymbol{P}$:

$\boldsymbol{Q = (-2x + 5)(4x + 5) - (x - 7)(4x + 5)}$ **facteur commun**

$Q = (4x + 5)[(-2x + 5) - (x - 7)]$

$Q = (4x + 5)[-2x + 5 - x + 7]$

$Q = (4x + 5)(-3x + 12)$

Attention aux changements de signes pour les parenthèses précédées d'un « – »

3. Calcule Q pour $x = 5$. Détaille les calculs.

On peut choisir d'utiliser la forme factorisée, plus courte :

$Q = (4 \times 5 + 5)(-3 \times 5 + 12) = (20 + 5) \times (-15 + 12) = 25 \times (-3) = -75$

Remarque : calculer Q pour $x = 5$ avec son expression initiale peut servir à vérifier la factorisation, si le résultat est également -75.

On considère le programme de calcul suivant :

Choisir un nombre
Le multiplier par 5
Ajouter 7 au résultat
Calculer le carré du résultat
Soustraire 9

1. Vérifie qu'en effectuant ce programme avec – 4 on obtient un résultat de 160.

$-4 \to -4 \times 5 = -20 \to -20 + 7 = -13 \to (-13)^2 = 169 \to 169 - 9 = 160$

2. Soit x le nombre de départ, et R le résultat du programme de calcul ; exprime R en fonction de x.

$x \to x \times 5 = 5x \to 5x + 7 \to (5x + 7)^2 \to (5x + 7)^2 - 9$

$R = (5x + 7)^2 - 9$

3. Prouve que $R = (5x + 10)(5x + 4)$.

$R = (5x + 7)^2 - 9 = (5x + 7)^2 - 3^2$ différence de carrés : identité remarquable

$R = (5x + 7 - 3)(5x + 7 + 3) = (5x + 4)(5x + 10) \text{ ou } (5x + 10)(5x + 4)$

4. Victor prétend que si on choisit un nombre entier comme nombre de départ, le résultat sera forcément un multiple de 5. Que penser de son affirmation ?

- Le calcul avec – 4 est un exemple qui convient, 160 est bien un multiple de 5. $160 = 5 \times 32$
- Un multiple de 5 peut s'écrire sous la forme $5 \times K$.

Or $(5x + 10)$ peut encore être factorisé : $5x + 10 = 5 \times x + 5 \times 2 = 5 \times (x + 2)$

Donc $R = (5x + 10)(5x + 4) = 5 \times (x + 2)(5x + 4)$

Le résultat est bien un **multiple de 5,** quel que soit le nombre entier choisi au départ.

Victor a raison !

Questions de brevet.

1. Une forme factorisée de l'expression littérale $4x^2 - 9$ est...

Réponse A	*Réponse B*	*Réponse C*	*Réponse D*
$(4x - 3)(4x + 3)$	$(2x - 3)(2x + 3)$	$(2x - 3)^2$	$(4x - 9)(4x + 9)$

$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2$ est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 3$

J'applique l'identité remarquable : $(2x - 3)(2x + 3)$ ***Réponse B***

2. Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse, en justifiant la réponse :
« Pour tout nombre $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{(2x + 1)^2 - 4 = (2x + 3)(2x - 1)}$.»

On peut développer chacune des expressions pour les comparer, ou remarquer une factorisation :

$(2x + 1)^2 - 4 = (2x + 1)^2 - 2^2$ est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = 2x + 1$ et $b = 2$

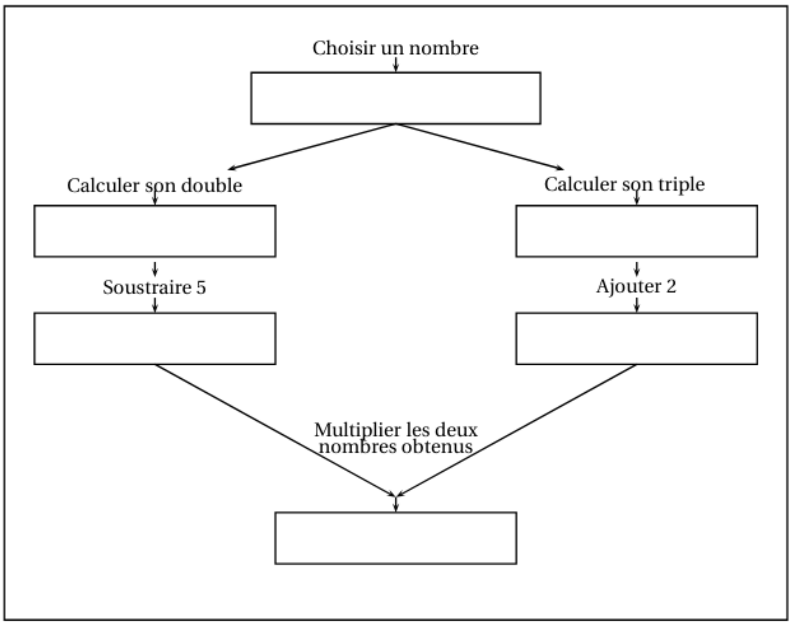
J'applique l'identité remarquable : $(2x + 1 - 2)(2x + 1 + 2) = (2x - 1)(2x + 3)$ ***VRAI***

3. On considère l'expression $\boldsymbol{E = (x - 2)(2x + 3) - 3(x - 2)}$. Factoriser $\boldsymbol{E}$.

$\boldsymbol{E = (x - 2)(2x + 3) - 3(x - 2)}$ facteur commun

$\boldsymbol{E = (x - 2)(2x - 3 + 3) = (x - 2)(2x) = 2x(x - 2)}$

4. La figure ci-dessous donne un schéma d'un programme de calcul.



a. Si le nombre de départ est 1, montrer que le résultat obtenu est −15.

On obtient à gauche : 1 → 2 → −3

et à droite : 1 → 3 → 5,

donc à la fin : −3 × 5 = −15

b. Si on choisit un nombre quelconque x comme nombre de départ, parmi les expressions suivantes, quelle est celle qui donne le résultat obtenu par le programme de calcul ? Justifier.

$$A = (x^2 - 5) \times (3x + 2) \qquad B = (2x - 5) \times (3x + 2) \qquad C = 2x - 5 \times 3x + 2$$

On obtient à gauche : $x \rightarrow 2x \rightarrow 2x - 5$

et à droite : $x \rightarrow 3x \rightarrow 3x + 2$,

donc à la fin : $(2x - 5)(3x + 2)$: c'est l'expression B.

c. Lily prétend que l'expression $D = (3x + 2)^2 - (x + 7)(3x + 2)$ donne les mêmes résultats que l'expression B pour toutes les valeurs de x. L'affirmation de Lily est-elle vraie ? Justifier.

On peut développer chacune des deux expressions, mais on peut aussi factoriser D en repérant un facteur commun : $D = (3x + 2)(3x + 2) - (x + 7)(3x + 2)$

$$D = (3x + 2)[(3x + 2) - (x + 7)] = (3x + 2)(3x + 2 - x - 7)$$

$$D = (3x + 2)(2x - 5) = (2x - 5)(3x + 2) = B$$: **Lily a raison**.

Pour aller plus loin.

Sur le site de Pass Education, tu trouveras **d'autres ressources** pour réviser cette notion :

Séquence complète	Factoriser avec une identité

PassEducation

Ce document PDF gratuit à imprimer est issu de la page :

- Exercices 11eme Harmos 11e C.O Mathématiques : Nombres et calculs Calcul littéral Factorisation - PDF à imprimer

Le lien ci-dessous vous permet de télécharger cet exercice avec un énoncé vierge

- Factoriser à l'aide d'une identité remarquable - avec Mon Pass Maths : 11ème Harmos

Découvrez d'autres exercices en : 11eme Harmos 11e C.O Mathématiques : Nombres et calculs Calcul littéra

- Factoriser une expression - Exercices corrigés : 11ème Harmos
- Factorisations - Exercices corrigés - Mathématiques - Soutien scolaire : 11ème Harmos

Les exercices des catégories suivantes pourraient également vous intéresser :

- Exercices 11eme Harmos 11e C.O Mathématiques : Nombres et calculs Calcul littéral Développement Réduction - PDF à imprimer
- Exercices 11eme Harmos 11e C.O Mathématiques : Nombres et calculs Calcul littéral Synthèse calcul littéral - PDF à imprimer

Besoin d'approfondir en : 11eme Harmos 11e C.O Mathématiques : Nombres et calculs Calcul littéral Factori

- Vidéos pédagogiques 11eme Harmos 11e C.O Mathématiques : Nombres et calculs Calcul littéral Factorisation
- Vidéos interactives 11eme Harmos 11e C.O Mathématiques : Nombres et calculs Calcul littéral Factorisation