Puissances d’exposants positifs ou négatifs

Je révise mon brevet pas à pas.

Mon Pass Maths

Correction

Prérequis : « priorités opératoires » et « nombres relatifs ».

- Ordre de priorité : parenthèses → multiplications/divisions → additions/soustractions.
- À égalité de priorité on procède de gauche à droite.
- Le produit/quotient de deux nombres relatifs de **même signe est positif** et le produit/quotient de deux nombres relatifs de signes **différents est négatif**.

Écrire sous forme de puissance.

Méthode pour écrire sous forme de puissance.

Etape ① : je **repère le terme répété** en multiplication **et je compte le nombre de répétitions**.

Etape ② : j’écris sous forme de **puissance a^n.**

Etape ③ : si la puissance est au **dénominateur**, j’écris sous la forme a^{-n}.

Exemples : **Écrire sous forme de puissance.**

$A = 8 \times 8$

Le terme répété est 8 et il y a 2 répétitions.

Donc $A = 8^2$

$B = \dfrac{1}{5 \times 5 \times 5 \times 5} = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{5}$

Le terme répété est $\frac{1}{5}$ et il y a 4 répétitions.

Donc $B = \frac{1}{5^4}$

La puissance est au dénominateur.

Donc $B = 5^{-4}$

Écris sous forme de puissance.

$A = 7 \times 7 \times 7$

$A = 7^3$

$B = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

$B = 5^6$

$C = (-15) \times (-15) \times (-15)$

$C = (-15)^3$

$D = \left(\frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{3}{5}\right)$

$D = \left(\frac{3}{5}\right)^4$

$E = \left(-\frac{5}{2}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right)$

$E = \left(-\frac{5}{2}\right)^4$

$F = (1 - 3 \times 5) \times (1 - 3 \times 5) \times (1 - 3 \times 5)$

$F = (1 - 3 \times 5)^3 = (-14)^3$

Écris sous la forme d'une puissance à exposant négatif chacune des expressions suivantes.

$A = \frac{1}{5^7}$

$A = 5^{-7}$

$B = \frac{1}{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}$

$B = \frac{1}{7^6} = 7^{-6}$

$C = \frac{1}{(-4) \times (-4) \times (-4)}$

$C = \frac{1}{(-4)^3} = (-4)^{-3}$

$D = -\frac{1}{13} \times \left(-\frac{1}{13}\right) \times \left(-\frac{1}{13}\right)$

$D = \left(-\frac{1}{13}\right)^3 = (-13)^{-3}$

Écris chacun de ces nombres sous la forme d'une puissance de 5.

$A = 25$

$A = 5 \times 5$

$A = 5^2$

$B = 0{,}2$

$B = \frac{1}{5}$

$B = 5^{-1}$

$C = 625$

$C = 5 \times 5 \times 5 \times 5$

$C = 5^4$

$D = 15\,625$

$D = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

$D = 5^6$

$E = 0{,}0016$

$E = \frac{1}{5 \times 5 \times 5 \times 5}$

$E = 5^{-4}$

$F = 1\,953\,125$

$F = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

$F = 5^9$

Écrire une puissance sous forme décimale.

Méthode pour écrire une puissance sous forme décimale.

Etape ① : je décompose la puissance en produit.

Etape ② : je calcule.

Rappel : En cas de puissance d'un nombre négatif :

- un produit de n facteurs est **positif** si n est **pair** : $(-2)^2$ **> 0**
- et **négatif** si n est **impair** : $(-2)^3$ **< 0**

Exemples :

$A = 4^3$

$A = 4 \times 4 \times 4$

$A = 64$

$B = 5^{-2}$

$B = \dfrac{1}{5 \times 5}$

$B = \dfrac{1}{25}$

$C = (-3)^4$

$C = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

$C = 81$

$D = (-4)^{-3}$

$D = \dfrac{1}{-4 \times -4 \times -4}$

$D = \dfrac{1}{-64} = -\dfrac{1}{64}$

Donne la valeur décimale des nombres suivants.

$A = 7^2$

$A = 7 \times 7$

$A = 49$

$B = 6^4$

$B = 6 \times 6 \times 6 \times 6$

$B = 1\,296$

$C = 117^1$

$C = 117$

$D = 1^{19}$

$D = 1$

$E = 5^{-4}$

$E = \frac{1}{5\times5\times5\times5}$

$E = \frac{1}{125} = 0{,}008$

$F = 73^0$

$F = 1$

$G = 10^{-6}$

$G = \frac{1}{10\times10\times10\times10\times10\times10}$

$G = 0{,}000001$

Indique si le nombre est positif ou négatif.

$A = (-7)^2$

L'exposant est pair donc le nombre est positif.

$B = (-6)^3$

L'exposant est impair donc le nombre est négatif.

$C = (-34)^0$

$C = 1$

Donc C est positif.

$D = (-5)^{-3}$

L'exposant est impair donc le nombre est négatif.

$E = (-14)^{-2}$

L'exposant est pair donc le nombre est positif.

Dans le système binaire, base de l'informatique, les nombres sont codés seulement avec des 0 et des 1.

Pour convertir un nombre binaire en un nombre décimal, on utilise les puissances de 2. Pour ce faire :

...	2^3	2^2	2^1	2^0
×	×	×	×	×
.	**1**	**0**	**1**	**1**
=	=	=	=	=
	8	0	2	1

- on place le nombre en binaire dans le tableau suivant (ici par exemple le nombre binaire 1011) ;

- on multiplie chaque 0 ou 1 par sa puissance de 2 correspondante ;

- puis on additionne les nombres obtenus :

1011 en binaire donne $\mathbf{1} \times 2^3 + \mathbf{0} \times 2^2 + \mathbf{1} \times 2^1 + \mathbf{1} \times 2^0 = \mathbf{8} + \mathbf{0} + \mathbf{2} + \mathbf{1} = \mathbf{11}$

En reprenant la même méthode, donne l'écriture décimale des nombres binaires 11, 0101 et 1010 :

11 en binaire donne $1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 2 + 1 = 3$

0101 en binaire donne $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 0 + 4 + 0 + 1 = 5$

1010 en binaire donne $1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 8 + 0 + 2 + 0 = 10$

Calculer en respectant les priorités opératoires.

Méthode pour calculer en respectant les priorités opératoires

Etape ① : je calcule ce qu'il y a à **l'intérieur des parenthèses**.

Etape ② : je calcule les **puissances**.

Etape ③ : je calcule dans l'ordre les **produits/divisions** puis les **additions/soustractions.**

Exemple :

$E = (7 - 5)^2 \div 2^3 + 3 \times 2^{-1}$

$E = (2)^2 \div 2^3 + 3 \times 2^{-1}$

$E = \dfrac{(2)^2}{2^3} + \dfrac{3}{2}$

$E = \dfrac{2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} + \dfrac{3}{2}$

$E = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}$

$E = \dfrac{4}{2} = 2$

Calcule en respectant les priorités opératoires.

$A = 2 \times 3^3$

$A = 2 \times 27 = 54$

$B = (2 \times 3)^3$

$B = (6)^3 = 216$

$C = -2 \times 3^3 + 5^3$

$C = -2 \times 27 + 125$

$C = -54 + 125 = 71$

Calcule en respectant les priorités opératoires.

$A = 64 \times 2^{-4} - \frac{8^2}{4^3}$

$A = 64 \times \frac{1}{2^4} - \frac{8 \times 8}{4 \times 4 \times 4}$

$A = \frac{64}{2 \times 2 \times 2 \times 2} - \frac{64}{64}$

$A = \frac{64}{16} - 1 = 4 - 1 = 3$

$B = (8-6)^4 \div 16 + 5 \div 2^2$

$B = \frac{(2)^4}{16} + \frac{5}{2 \times 2}$

$B = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{16} + \frac{5}{4}$

$B = \frac{16}{16} + \frac{5}{4} = \frac{4}{4} + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$

$C = \frac{(17-14)^3}{4^2 - 2^3 - 5}$

$C = \frac{3^3}{4 \times 4 - 2 \times 2 \times 2 - 5}$

$C = \frac{3 \times 3 \times 3}{16 - 8 - 5}$

$C = \frac{27}{3} = 9$

Calcule en respectant les priorités opératoires.

$A = -2 \times 4^2$

$A = -2 \times 4 \times 4$

$A = -2 \times 16 = \mathbf{-32}$

$B = (-2 \times 4)^2$

$B = (-8)^2$

$B = (-8) \times (-8)$

$B = \mathbf{64}$

$C = -3 \times 2^3 + 0{,}1^{-2}$

$C = -3 \times 8 + \frac{1}{0{,}1^2}$

$C = -24 + \frac{1}{0{,}1 \times 0{,}1}$

$C = -24 + 100 = \mathbf{76}$

$D = 16 \times 2^{-3} - \frac{8^2}{2^5}$

$D = 16 \times \frac{1}{2^3} - \frac{8 \times 8}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$

$D = \frac{16}{2 \times 2 \times 2} - \frac{64}{32}$

$D = \frac{16}{8} - 2 = 2 - 2 = \mathbf{0}$

$E = (6-2)^2 \div 3^2 + 4 \times 3^{-1}$

$E = \frac{(4)^2}{3^2} + \frac{4}{3}$

$E = \frac{16}{9} + \frac{4}{3}$

$E = \frac{16}{9} + \frac{12}{9} = \mathbf{\frac{28}{9}}$

$F = \frac{(7-3)^3}{4^2 \times 2^{-3} + 4}$

$F = \frac{4^3}{\frac{4 \times 4}{2 \times 2 \times 2} + 4}$

$F = \frac{4 \times 4 \times 4}{\frac{16}{8} + 4} = \frac{64}{2 + 4}$

$F = \frac{64}{6} = \mathbf{\frac{32}{3}}$

Résoudre les problèmes utilisant les puissances d'exposants positifs ou négatifs.

Méthode pour résoudre des problèmes utilisant les puissances.

Etape ① : je lis l'énoncé et **je souligne les données importantes.**

Etape ② : j'identifie l'élément qui va se répéter et le nombre de répétitions.

Etape ③ : **je résous le problème**.

Exemple : Guillaume a oublié le mot de passe à 4 chiffres de son téléphone. Combien de combinaisons possibles existe-t-il ?

Étape 1 : Guillaume a oublié le mot de passe à 4 chiffres de son téléphone. Combien de combinaisons possibles existe-t-il ?

Étape 2 : j'identifie **l'élément qui se répète.** Ici il s'agit d'un chiffre, or on peut choisir parmi **10 chiffres différents (entre 0 et 9)**.
J'identifie **le nombre de répétitions.** Le mot de passe comporte **4 chiffres**. Donc **4 répétitions.**

Étape 3 : 10 chiffres et 4 répétitions, cela donne **10^4 = 10 000** codes différents pour Guillaume.

12 camions transportent chacun 12 palettes. Ces palettes contiennent chacunes 12 cartons contenant 12 paquets de 12 gâteaux. Combien de gâteaux sont transportés en tout ? Écris le résultat sous forme de puissance en justifiant, puis sous forme décimale.

L'élément qui se répète est le nombre 12. Il y a 5 répétitions.

Donc il y a 12^5 gâteaux, soit 248 832 !

1. Dans une expérience scientifique, on observe le comportement de certaines cellules dans un environnement particulier. Chaque heure, le nombre de cellules double. Au départ, il y a une seule cellule. Après 1 heure, combien de cellules y aura-t-il ? Après 2 heures ?

Après 1 heure, il y aura $1 \times 2 = 2$ cellules. Après 2 heures, il y aura $1 \times 2 \times 2 = 4$ cellules.

2. Après 4 heures, combien de cellules y aura-t-il ?

Après 4 heures, il y aura $1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$. Il y aura 16 cellules.

3. Ecris ce résultat sous la forme d'un nombre relatif avec une puissance : $16 = 2^4$

4. Quel est l'évènement qui se répète dans ce cas ? A quoi le nombre de répétitions est-il lié ?

L'évènement qui se répète est le doublement des cellules. Le nombre de répétitions est lié au temps t qui passe.

5. Ecris une expression littérale du nombre de cellules en fonction du temps t. Puis calcule après 24 heures, combien il y aura de cellules en utilisant ta calculatrice.

Nombre de cellules = 2^t donc après 24 heures, il y aura 2^{24} cellules soit 16 777 216 cellules.

Questions de brevet.

Première partie :

Mr Racontetou a entendu une rumeur lors d'un voyage. Dès le premier jour de son retour dans sa ville, il répète cette rumeur à 3 personnes. Le deuxième jour, chacune de ces 3 personnes répète cette rumeur à 3 nouvelles personnes. Les jours suivants, la rumeur continue à se propager de la même manière.

1. Combien de personnes apprennent la rumeur le 3ème jour ?

Le premier jour, 3 personnes sont au courant. Le deuxième jour, il y aura $3 \times 3 = 9$ personnes et le 3ème jour $3 \times 3 \times 3 = 27$ personnes.

2. Combien de personnes apprennent la rumeur le 8ème jour ? Exprime ton résultat d'abord sous forme de puissance puis sous forme décimale.

En suivant le même raisonnement, $3^8 = 6\,561$ personnes seront au courant le 8ème jour.

3. La ville où habite Mr Racontetou compte 100 000 habitants. Au bout de combien de jours peut-on considérer que toute la ville est au courant de cette rumeur ?

On sait qu'au bout de 8 jours, 6 561 personnes sont au courant.

Donc au bout de 9 jours, $3^9 = 19\,683$ personnes sont au courant. Au bout de 10 jours, $3^{10} = 59\,049$ personnes et au bout de 11 jours : $3^{11} = 177\,147$ personnes.

Donc le 11ème jour toute la ville sera au courant.

Deuxième partie :

Arsène Lumin se retrouve face à un coffre-fort un peu particulier. Ce dernier possède 8 boutons crantés qui peuvent chacun prendre 4 positions différentes.

1. Combien de combinaisons possibles existe-t-il ?

Il y a 4 possibilités pour le premier bouton, puis 4 possibilités pour le suivant, soit $4 \times 4 = 4^2 = 16$ possibilités. En suivant le même raisonnement, il y a $4^8 = 65\,536$ possibilités.

2. Arsène est un professionnel et ne met que 7 secondes pour tester une combinaison. En combien de temps au maximum mettra-t-il à ouvrir ce coffre-fort ? Exprime ton résultat en heures. Cela te paraît-il réalisable ?

On multiplie le nombre de combinaisons par le nombre de secondes. On a donc :

$T = 65\,536 \times 7 = 458\,752\ s$

Or on sait qu'il y a $60 \times 60 = 3600\ s$ dans 1h.

Donc $T = \frac{458\,752}{3600} \approx 127\text{ h}$

C'est beaucoup trop, même pour Arsène Lumin !

Pour aller plus loin.

Sur le site de Pass Education, tu trouveras **d'autres ressources** pour réviser cette notion :

Séquence complète	Puissance
Exercices type Brevet	Brevet 6